11/04/2019

6η διάλεξη

$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$

$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + 15n$

Αν $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon}) \Longrightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

$f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^k n) \Longrightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^{(k+1)} n)$

$f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon}) \Longrightarrow T(n) = \Theta(f(n))$

Π.χ

$n^{\log_4 3 + \underbrace{1}_{=\varepsilon}} \longrightarrow T(n) = \Theta(n)$

$T(n) = 6T\left(\frac{n}{2}\right) + 12n^2$, $a=6$, $b=2$, $f(n) = 12n^2$

$n^{\log_b a} = n^{\log_2 6 - \underbrace{\varepsilon}_{=2}}$, $T(n) = \Theta(n^2)$

Π.χ.

$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$

$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$

$\Big\}$ $a=2$, $b=2$, $f(n)=n$

$f(n) = n = n^{\log_2 2} \log^{\underbrace{0}_{=k}} n \xRightarrow{2^\eta \text{ περίπτωση}} T(n) = \Theta(n \log n) = \Theta(n^{\log_2 2} \log n)$

Π.χ.

$T(n) = 16\,T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2$

$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$

$\Big\} \Rightarrow a=16$, $b=4$, $f(n)=n^2$

$n^2 = n^{\log_4 16} \log^{\underbrace{0}_{=k}} n = n^{\log_4 4^2} (\log n)^0 = n^{2 \underbrace{\log_4 4}_{=1}} \cdot 1 = n^2$ ισχύει

Άρα από 2^η περίπτωση: $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^{(k+1)} n) =$

$= \Theta(n^{\log_4 16} \log^{(1+0)} n) =$

$= \Theta(n^{\log_4 4^2} \log n) = \Theta(n^{2 \underbrace{\log_4 4}_{=1}} \log n) =$

$= \Theta(n^2 \log n)$

π.χ.

$T(n) = T(n-1) + n \quad , n \geq 0$ S.O.S.

$T(0) = 1$

Να λυθεί η παρακάτω αναδρομική εξίσωση. (να λυθεί αναδρομικά)

Δεν είναι της μορφής του Master Theorem:

$T(n) = T(n-1) + n = T(n-2) + (n-1) + n =$

$= T(n-3) + (n-3) + (n-2) + (n-1) + n = \ldots\ldots =$

$= T(0) + \underbrace{1 + 2 + \ldots + n}_{= \frac{n(n+1)}{2}} = 1 + \frac{n(n+1)}{2} =$

$\frac{n(n+1)}{2}$ ← είναι γνωστό

$T(0) = 1$

$T(1) = T(0) + 1 = 2$

$T(\cancel{2}) = T(1) + 2 = 2 + 2$

$T(\cancel{3}) = T(\cancel{2}) + 3$

$T(\cancel{n-1}) = T(n-2) + n - 1 \Rightarrow T(n) = T(0) + \frac{n(n-1)}{2} = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$ ← τάξη n^2 S.O.S.

$T(n) = T(\cancel{n-1}) + n = 1 + \frac{n^2+n}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1$

Άρα $T(n) = \Theta(n^2)$

π.χ. Από πάνω προς το κάτω αυξάνεται η ταχύτητα (αν μας ζητηθεί η διάταξη):

σταθερός	$O(1)$	← Αυτά ισχύουν
λογαριθμικός	$O(\log n)$	
γραμμικός	$O(n)$	
$O(n \log n)$ ...		
τετραγωνικός	$O(n^2)$	
κυβικός	$O(n^3)$	
πολυωνυμικός	$O(n^d)$	, $d > 0$
εκθετικός	$O(r^n)$	, $r > 1$

(1) Να διατάξετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως το ρυθμό ~~αύξησης~~ άφιξης από την μικρότερη ως τη μεγαλύτερη (3)

$f_1(n) = n^{5/4}$
$f_2(n) = n \log n$ } πολυωνυμικές

$f_3(n) = n!$
$f_4(n) = 10^n$
$f_5(n) = n^{\log n}$ } εκθετικές

Άρα σίγουρα οι πρώτες δύο είναι μικρότερου ρυθμού από τις υπόλοιπες τρεις (αφού οι υπόλοιπες 3 είναι εκθετικές)

$$\left(\text{Αν } \lim \frac{f(n)}{T(n)} = 0 \quad \text{τότε το } \cancel{\text{κάτω}} \; T(n) > f(n) \right) \log 2$$

Ένας τρόπος για να τις διατάξουμε είναι να πάρουμε το $\lim_{n\to\infty}$:

Εξετάζουμε:

αφού οι συναρτήσεις παραγωγίσιμες, ∃ η παράγωγος, άρα εφαρμόζω D.L.H.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \log n}{n^{5/4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^{1/4}} \overset{\downarrow}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{(\log n)'}{(n^{1/4})'} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{4} n^{-3/4}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4 n^{3/4}}{n} \to 0$$

Άρα: $f_2(n) \leq f_1(n)$
$\qquad\qquad\qquad\quad \overset{\shortparallel}{n^{5/4}}$

Η log είναι αύξουσα συνάρτηση ↗, θα εξετάσω f_4, f_5

$\log f_4(n) = \log 10^n \xrightarrow[\text{λογαρίθμων}]{\text{ιδιότητες}} n \cdot \log 10$ (1)

$\log f_5(n) = \log n^{\log n} \xrightarrow[\text{λογαρίθμων}]{\text{ιδιότητες}} (\log n)^2$ (2)

Θέτω : $z = \log n \Rightarrow z^2 = (\log n)^2 \longrightarrow$ Όμως: $\underset{\text{πολυωνυμική}}{z^2} < \underset{\text{εκθετική}}{\log 10 \cdot 2^z}$

βάζοντας εδώ το $z = \log_2$ και κάνω αντικατάσταση βρίσκω το (1)

με αυτόν τον τρόπο το φράζω από πάνω.

Άρα $f_5 < f_4$

Μέχρι τώρα έχουμε φτάσει: $f_2(n) \le f_1(n) \le f_5 \le f_4$

$\log f_4(n) = n \log 10$

$\log(n!)$

$x^n < n!$

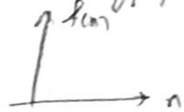
$n! < n^n$

$10^n < n^n$

Ooo Δεν ξέρω αν ισχύει

Ισχύει $n! < n^n \Rightarrow \log(n!) < n \log n = \log n^n$

Στο γράφημα



Ποιό από τα δύο είναι πιο ψηλά

$\lim_{n \to \infty} \frac{f_4(n)}{f_3(n)} = 0$

$\lim_{n \to \infty} \frac{10^n}{n!}$

άσκηση για το σπίτι